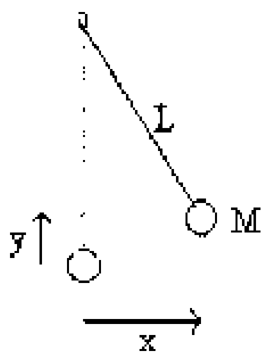
Tentamen Golven en Optica (25/8/97, 13.00-16.00)

Begin iedere opgave op een apart vel papier en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.

Vraagstukken 1 en 2 gelden als AN3a, uitsluitend voor ouderejaars die AN3b al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3a' op het eerste vel); vraagstukken 3 en 4 gelden als AN3b, uitsluitend voor ouderejaars die AN3a al gehaald hebben (vermeld dan 'AN3b' op het eerste vel); alle overigen kunnen uitsluitend een ongedeeld tentamen (vraagstukken 1 t/m 4) doen.
(Tentamentijd voor iedereen 13.00-16.00; puntenverdeling: 1=20[4+4+4+4+4], 2=20[5+5+5+5], 3=20[3+3+3+3+2+3+3], 4=20[5+5+5+5]).

Vraagstuk 1



Gegeven is een slinger met lengte L. Aan deze slinger hangt een massa M. De coordinaten x en y worden gekozen zoals aangegeven in de figuur.

a. Beschouw eerst een ideale (ongedempte) slinger. Stel de differentiaalvergelijking op voor de uitwijking x van de massa M. Tip: ga uit van de energievergelijking. Er mag verondersteld worden dat $y \ll x$.

De slinger wordt nu aangedreven met een kracht $F_0 \cos\omega t$, uitgeoefend op de massa M. Daarnaast vindt er nu demping plaats door de luchtweerstand van de massa M. Deze demping mag evenredig verondersteld worden met de snelheid van M in de x-richting (Noem de dempingsconstante b).

b. Stel nu de totale bewegingsvergelijking op voor de aangedreven en gedempte slinger. Wat is de kwaliteitsfactor Q voor dit systeem?

c. Leid uitdrukkingen af voor de amplitude A en fase δ van de slingerende massa m, als functie van de aandrijffrequentie ω.

d. De slinger wordt aangedreven met $\omega=\omega_0$. Hoe zal de slingerbeweging veranderen als er een grotere massa aan de slinger gehangen wordt? En als de slinger langer wordt gemaakt?

Het vermogen dat geabsorbeerd wordt door een met frequentie ω aangedreven oscillator wordt gegeven door:

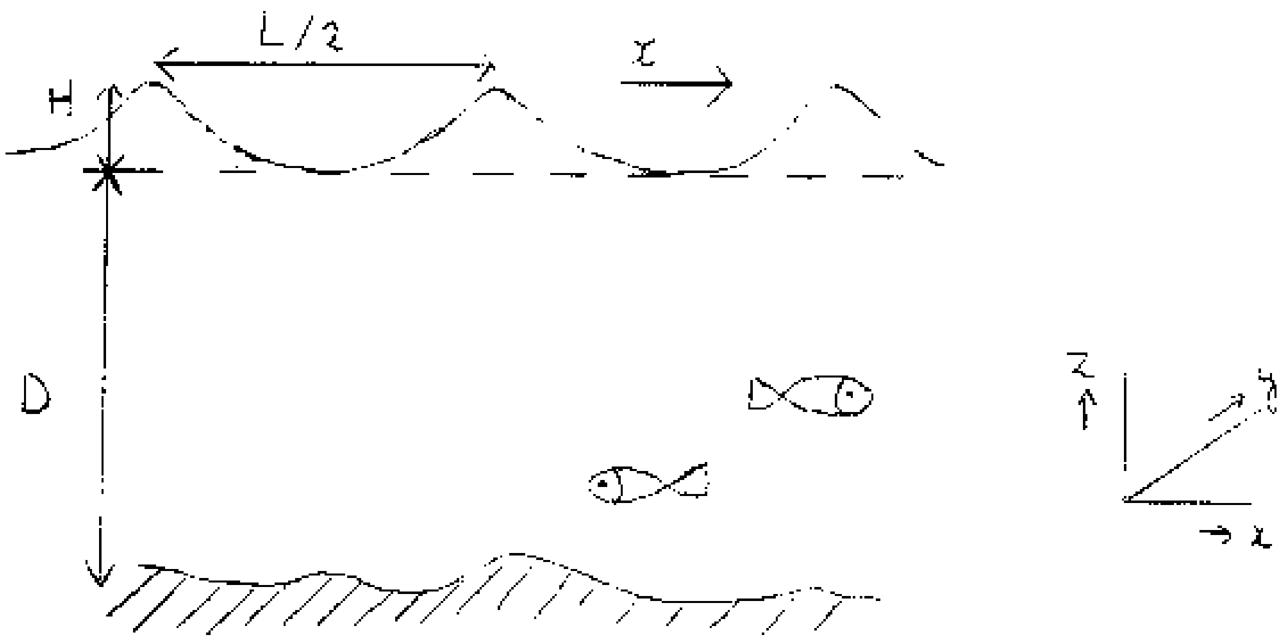
$$\overline{P}(\omega) = \frac{F_0^{\,2}}{2M\omega_0} \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}}$$

e. Laat aan de hand van deze uitdrukking zien dat de halfwaardebreedte van de vermogensresonantiecurve (P uitgezet tegen ω) bij benadering gelijk is aan γ (=b/M). Als een aangedreven systeem een erg smalle resonantierespons heeft, zullen dan de vrije oscillaties van dat systeem snel of langzaam uitdempen? Leg uit.

Vraagstuk 2

In diep water loopt in de positieve x-richting een golfpatroon (zie Figuur). Op t=0 heeft het wateroppervlak de vorm

$$Z(x,y) = D + H\cos^4(2\pi x/L). \qquad (1)$$



a. Schrijf Z op t=0 (en voor willekeurige y) als Fourier-reeks (hint: je hoeft niet te integreren, gebruik $\cos^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha$).

De voortplanting is een gevolg van de gravitatie (correct als L groter is dan ongeveer 1 meter), en dus geldt de volgende dispersierelatie:

$$\omega = C\sqrt{k}$$

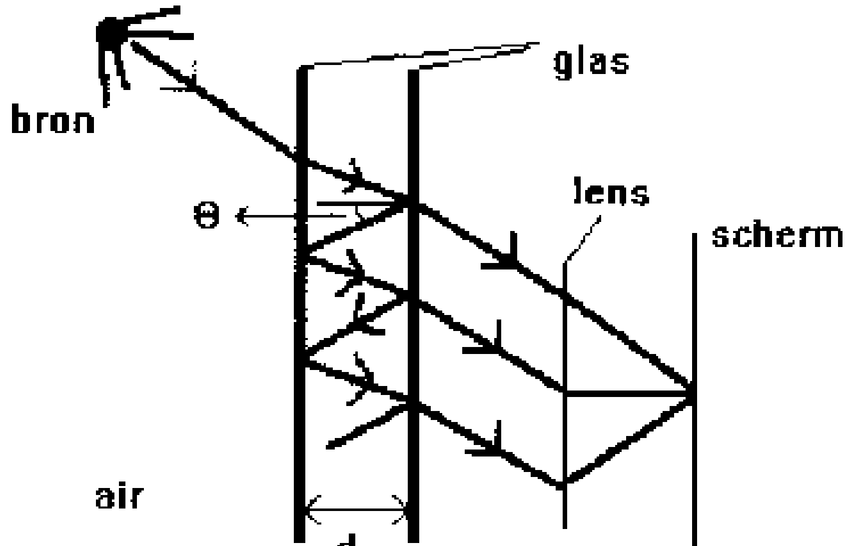
($k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, λ is de golflengte en T is de periode van een lopende (co)sinusgolf; C is een constante)

b. Wat is de voortplantingssnelheid van elk van de Fourier-componenten in het golfpatroon?
c. Beschrijf wat er met het golfpatroon gebeurt voor t >0.
d. Gegeven: L=2 m; C=3.2 $\sqrt{\text{m}}$ / s . Na hoeveel tijd heeft het golfpatroon weer de *vorm* van

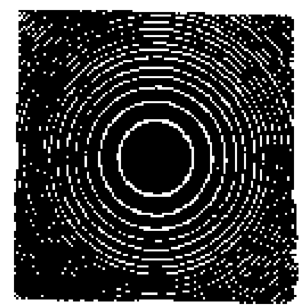
vergelijking (1)? (N.B. De *positie* op de x-as van het patroon is niet identiek aan die op r=0.).

Vraagstuk 3

Een lichtbron (A) zendt licht uit met een golflengte λ_1=600nm, dat valt op de (Fabry-Perot) opstelling van figuur 3.1. De focusserende lens zorgt ervoor dat het interferentie patroon als ringen wordt weergegeven (figuur 3.2).



Figuur 3.1



Figuur 3.2

a. Leid een uitdrukking af voor het fase verschil δ tussen twee opeenvolgende uittredende stralen uit het Fabry-Perot etalon in termen van d, λ_1 en θ (zie figuur 3.1).
b. Leid het criterium af voor het ontstaan van het m-de orde maximum voor licht met golflengte λ_1.

Nu wordt er een tweede golflengte $\lambda_2=\lambda_1+\Delta\lambda$ toegevoegd aan de lichtbron, en een student natuurkunde wordt gevraagd uit te zoeken wat de golflengte van de tweede component is. Zij merkt op dat het m-de maximum van het licht met golflengte λ_1 samenvalt met het n-de maximum van golflengte λ_2. Ook ziet ze dat bij $m'=m+201$ en $n'=n+200$ weer twee maxima samenvallen

c. Schrijf voor beide golflengtes de uitdrukking die je in b gevonden hebt op voor beide keren dat de maxima samenvallen.
d. Laat zien dat λ_2 603 nm is.

De student is nu enthousiast geworden en wil de twee componenten met verschillende golflengtes van elkaar scheiden. Hiervoor wordt een zeer speciaal blokje gebruikt van een materiaal met brekingsindex n=2.1 voor λ=603 nm, en n=1.206 voor λ=600 nm. Het blokje wordt ondergedompeld in een vloeistof met brekingsindex n=3. Neem in het volgende aan dat het licht **transversaal magnetisch gepolariseerd (TM)** is . Voor de Brewsterhoek geldt: $\theta_{brewster}$=arctan(n) en voor de grenshoek (critical angle) geldt: θ_{grens}=arcsin(n).

e. Laat zien dat als het licht vanuit de vloeistof op dit materiaal valt er sprake is van interne reflectie.

f. Wat gebeurt er als het TM-licht invalt onder een hoek die groter is dan de grenshoek? En wat gebeurt er als het TM-licht invalt onder de Brewsterhoek?

g. Bij welke hoek is er sprake van complete scheiding tussen de twee lichtcomponenten met verschillende golflengten?

Vraagstuk 4

Gegeven is een niet-geleidend, isotroop medium, met een macroscopische polarisatie $\vec{P} = -Ne\vec{r}$, met $-e$ de lading van het electron, N het aantal electronen per eenheidsvolume, en $\vec{r}$ de verplaatsing van elk electron uit de evenwichtstoestand ten gevolge van een statisch electrisch veld $\vec{E}$. Elk electron is aan een atoom gebonden met een veerconstante s (de kracht is evenredig met de verplaatsing).

a. Leid een uitdrukking af voor de statische polarisatie in termen van N , e , s , en $\vec{E}$.

Het electrische veld varieert nu in de tijd als $e^{i\omega t}$, met ω de hoekfrequentie. Veronderstel een wijvingscoëfficiënt b voor de beweging van de electronen

b. Stel de bewegingsvergelijking op voor de electronen (elk met een massa m), en leid hieruit af hoe $\vec{P}$ varieert als functie van ω .

Invullen hiervan in de Maxwellvergelijkingen leidt uiteindelijk tot de vergelijking

$$\nabla^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\left(1+\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\, b/m}\right)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

, met $\omega_0 = \sqrt{s/m}$, c de lichtsnelheid, en ε_0 de diëlectrische constante. Stel dat een vlakke golf in de z-richting $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(Kz-\omega t)}$ een oplossing is van deze vergelijking.

c. Leid hieruit een uitdrukking voor K af, en geef een fysische interpretatie van zowel het reële als het imaginaire deel van K (het is niet nodig expliciete uitdrukkingen voor het reële en imaginaire deel af te leiden).

d. Bij welke frequentie treedt maximale absorptie in benadering op, als geldt dat $b/m \ll \omega_0$?